ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ HƯƠNG GIANG

KHÔNG ĐIỂM CỦA ĐẠO HÀM VÀ ĐA THỨC VI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH p-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ HƯƠNG GIANG

KHÔNG ĐIỂM CỦA ĐẠO HÀM VÀ ĐA THỨC VI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH p-ADIC

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: PGS.TS Hà Trần Phương

Thái Nguyên, năm 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đề tài luận văn "**Không điểm của đạo hàm và đa thức vi phân của hàm phân hình p-adic**" không có sự sao chép của người khác. Khi viết luận văn tôi có tham khảo một số tài liệu, tất cả đều có nguồn gốc rõ ràng và được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Hà Trần Phương. Nếu có vấn đề gì tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Hoàng Thị Hương Giang

Xác nhận
của chủ nhiệm khoa Toán

Xác nhận
của người hướng dẫn

PGS. TS Hà Trần Phương

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới PGS. TS. Hà Trần Phương. Thầy đã dành nhiều thời gian, công sức để hướng dẫn, trả lời những thắc mắc, kiểm tra bài và giúp đỡ tôi hoàn thành bài luận văn này.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới bố, mẹ và các thành viên trong gia đình đã luôn động viên, ủng hộ tôi trong suốt thời gian qua.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo trong trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên đã luôn nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu, đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi hoàn thành chương trình học và bảo vệ luận văn.

Bản thân tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên những thiếu sót chắc chắn khó tránh được. Tôi rất mong được thầy cô và các bạn đọc chỉ cho những thiếu sót đó.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Học viên

Hoàng Thị Hương Giang

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

Cho $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không và đầy đủ với giá trị tuyệt đối không Acsimet (p-adic) và f là một hàm phân hình trên $\mathbb{K}$. Kí hiệu f' là đạo hàm của hàm f và kí hiệu

$$F = a_n f^n f^{(k)} + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0,$$

trong đó a_j là các hàm nhỏ đối với f, là một đa thức vi phân của hàm phân hình f.

Trong trường hợp phức đã có rất nhiều tác giả nghiên cứu về số không điểm của f và F trong các trường hợp khác nhau của hàm f. Đối với trường hợp hàm phân hình trên trường p-adic, năm 2012, K. Boussaf, A. Escassut, J. Ojeda ([2]) đã chứng minh nếu Wronskian của hai hàm nguyên là một hàm đa thức thì cả hai hàm nguyên đó là một đa thức. Từ đó các tác giả đã chứng minh đạo hàm f' của một hàm phân hình siêu việt f trên $\mathbb{K}$ sẽ nhận mọi giá trị trên trường $\mathbb{K}$ vô hạn lần nếu f có hữu hạn cực điểm bội. Dựa trên các nghiên cứu của K. Boussaf, A. Escassut, J. Ojeda, năm 2012, J-P Bézivin, K. Boussaf, A. Escassut ([3]) đã đặt ra giả thuyết nếu đạo hàm của f' của hàm phân hình f có hữu hạn không điểm thì f có là hàm hữu tỷ? Cũng trong bài báo này, một số kết quả tổng quát đã được các tác giả đã chứng minh. Trong [4], A. Escassut, W. Lü, and C. C. Yang đã nghiên cứu vấn đề nói trên cho trường hợp đa thức vi phân F.

Với mong muốn tìm hiểu về vấn đề không điểm hàm phân hình và đạo hàm của nó, chúng tôi lựa chọn đề tài "**Không điểm của đạo hàm và**

đa thức vi phân của hàm phân hình p-adic". Mục tiêu của đề tài là trình bày lại các kết quả nghiên cứu đã được công bố gần đây của các tác giả K. Boussaf, A. Escassut, J. Ojeda, J-P Bézivin, W. Lü, and C. C. Yang trong các bài báo [2], [3], [4]. Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung chính, phần kết luận và tài liệu tham khảo. Trong Chương 1, tôi bắt đầu từ sự trình bày những cơ sở lý thuyết thường được sử dụng về các hàm phân hình p-adic, các hàm Nevanlinna và tính chất của nó, bao gồm các định nghĩa, thuật ngữ, ký hiệu, một số mệnh đề và định lý cơ bản. Các kiến thức cơ bản được tôi tham khảo trong tài liệu [1]. Trong Chương 2, các kết quả nghiên cứu gần đây của các tác giả K. Boussaf, A. Escassut, J. Ojeda, J-P Bézivin, W. Lü, and C. C. Yang trong các bài báo [2], [3], [4] sẽ được trình bày lại một cách tường minh và tính toán lại cẩn thận các lập luận.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, tôi sẽ giới thiệu một số định nghĩa, thuật ngữ, ký hiệu cùng một số mệnh đề và định lý cơ bản. Trong toàn bộ luận văn, chúng ta luôn ký hiệu các trường số hữu tỷ, số thực, số phức lần lượt là $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ký hiệu vành các số nguyên là $\mathbb{Z}$.

1.1 Các hàm Nevanlinna p-adic

1.1.1 Hàm phân hình p-adic

Cho $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số, đầy đủ có đặc số không. Chúng ta đã được biết một hàm $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ là một giá trị tuyệt đối trên trường $\mathbb{K}$ nếu ba điều kiện sau được thỏa mãn:

1) $|x| \geq 0$ với mọi x, $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

2) $|x.y| = |x|.|y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{K}$;

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{K}$.

Chúng ta đã biết đến giá trị tuyệt đối thông thường $|.|$ được định nghĩa như sau:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0; \\ -x \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

Với các số $x, y \in \mathbb{Q}$, chúng ta ký hiệu $d(x, y) = |x - y|$ thì d chính là một khoảng cách trên tập hợp các số hữu tỷ. Điều đó có nghĩa là khoảng cách giữa hai số hữu tỉ x và y được xác định bằng giá trị tuyệt đối $|x-y|$. Một khoảng cách thì cần thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

1) Khoảng cách giữa hai điểm phân biệt phải là một số dương và bằng 0 khi hai điểm đó trùng nhau;

2) Khoảng cách từ điểm x đến điểm y phải bằng khoảng cách từ điểm y đến điểm x;

3) Khoảng cách giữa hai điểm x và z phải nhỏ hơn hoặc bằng tổng khoảng cách từ x đến y và khoảng cách từ y đến z (Bất đẳng thức tam giác).

Khoảng cách được xác định như trên không phải là duy nhất. Thật vậy, trên tập hợp số hữu tỷ còn có những khoảng cách khác nữa. Với mỗi số nguyên tố p, ta định nghĩa giá trị tuyệt đối p-adic như sau:

Định nghĩa 1.1. Với x là một số hữu tỷ, nếu $x = 0$ thì ta định nghĩa $|0|_p = 0$. Nếu $x \neq 0$, chúng ta viết được $x = p^\alpha \dfrac{a}{b}$, trong đó $\alpha \in \mathbb{Z}$ và a, b không chia hết cho p. Ta định nghĩa giá trị tuyệt dối p-adic của x là

$$|x|_p = p^{-\alpha}.$$

Nhận xét 1.1. Ta có
$$\frac{1}{k} \leq |k|_p \leq 1,$$
với mọi số k là số nguyên dương. Thật vậy, ta viết $k = p^m k_1$, trong đó $m \geq 0$ và $p \nmid k_1$. Biểu diễn đó là duy nhất và khi đó,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p^m k_1} \leq \frac{1}{p^m} = |k|_p \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} \leq |k|_p \leq 1.$$

Hàm $|.|_p$ xác định như trên là một giá trị tuyệt đối không Acsimet trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tức là ngoài ba điều kiện của giá trị tuyệt đối, $|.|_p$ còn thỏa mãn thêm điều kiện

3') $|x+y)|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Trong thực tế, ta có

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}, \text{ nếu } |x|_p \neq |y|_p,$$

và rõ ràng, nếu ta đặt $d_p(x,y) = |x-y|_p$ thì d_p là một khoảng cách trên trường các số hữu tỷ và d_p thỏa mãn thêm điều kiện

3') $d_p(x,y) \leq \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Khoảng cách d_p khi đó được gọi là siêu metric (hay còn gọi là khoảng cách không Acsimet) và ta gọi $\mathbb{K}$ là không gian siêu metric.

Ta trang bị cho trường $\mathbb{K}$ giá trị tuyệt đối p-adic $|.|_p$. Khi đó $|.|_p$ sẽ cảm sinh trên $\mathbb{K}$ một siêu metric d_p. Với mỗi số thực $r > 0$ và một phần tử a thuộc $\mathbb{K}$, ta ký hiệu hình cầu đóng và mở tâm a, bán kính r lần lượt là

$$d(a,r) = \{z \in \mathbb{K} \,|\, |z-a|_p \leq r\},$$
$$d(a,r^-) = \{z \in \mathbb{K} \,|\, |z-a|_p < r\}.$$

Vành $\{z \in \mathbb{K} | r < |z-a|_p < R\}$ được ký hiệu là $\Gamma(a,r,R)$.

Trên không gian siêu metric ta có hai tính chất hình học đặc biệt hơn so với không gian metric thông thường, đó là mọi tam giác đều cân và mọi điểm nằm trong một hình cầu đóng hay mở đều là tâm của nó.

Khi mở rộng từ các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ đến các số thực $\mathbb{R}$, ta dùng đến các dãy Cauchy theo $|.|$, đó là các dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số N sao cho với mọi $m, n > N$ ta có $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Chúng ta cũng thêm vào $\mathbb{Q}$ các dãy Cauchy theo $|.|_p$ để được trường các số p-adic $\mathbb{Q}_p$. Lấy bao đóng của $\mathbb{Q}_p$ ta sẽ được $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Nhưng vì $\bar{\mathbb{Q}}_p$ không đóng đại số nên ta lại tiếp tục bổ sung thêm các dãy Cauchy để có được $\mathbb{C}_p$. Đến đây, $\mathbb{C}_p$ là một trường đầy đủ và đóng đại số.